

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ:

- 1) Καθορισμός της σ.η. ή σ.η. $f(\underline{x}/\theta)$ όπου θ η τιμή της τιμ. Θ
- 2) Καθορισμός της εκ των προτέρων κατανομής της τιμ. θ , $\pi(\theta)$, $\zeta(\theta)$
- 3) Υπολογισμός της εκ των υστέρων κατανομής της τιμ. $\theta/\underline{x}$, $\pi(\theta/\underline{x})$, $\zeta(\theta/\underline{x})$
- 4) Στατιστική Συμπερασματολογία (εκτίμηση σε σκληρό δ.ε, τεστ υποθέσεων).

Υπενθύμιση:

Εστω A, B δύο ενδεχόμενα του δ.χ. Ω τότε

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

Συνεχής Περίπτωση:

$$\pi(\theta/\underline{x}) = \frac{(\text{περιθώρια του } \theta) \times (\text{κατανομή του } \underline{x}/\theta)}{\text{κατανομή του } \underline{x}}$$

$$\stackrel{\text{1ος όρος}}{=} \frac{\pi(\theta) \cdot f(\underline{x}/\theta)}{\int_{\Omega} \text{από κοινού των } (\underline{x}, \theta) d\theta} =$$

$$\stackrel{\text{2ος όρος}}{=} \frac{\pi(\theta) \cdot f(\underline{x}/\theta)}{\int_{\Omega} \pi(\theta) \cdot f(\underline{x}/\theta) d\theta} \geq 0$$

$c(\underline{x})$

$$\text{και } \int_{\Omega} \pi(\theta/\underline{x}) d\theta = \int_{\Omega} \frac{\pi(\theta) \cdot f(\underline{x}/\theta)}{c(\underline{x})} d\theta = 1 \Rightarrow \int_{\Omega} \pi(\theta) f(\underline{x}/\theta) d\theta = c(\underline{x})$$

Παράδειγμα 1:

Έστω X η n ουσία δοθείσας με πιθανότητα θ με θ ακολουθεί $B(n, \theta)$. Δηλ, $p(x|\theta) = \binom{n}{x} \cdot \theta^x \cdot (1-\theta)^{n-x}$ για $x=0, 1, \dots, n$ και $0 \leq \theta \leq 1$

Αν η θ έχει ως των προηγούμενων κατανομή είναι $\text{Beta}(a, b)$ δηλ. $\pi(\theta) = \frac{\theta^{a-1} \cdot (1-\theta)^{b-1}}{B(a, b)}$, $0 \leq \theta \leq 1$

Να υπολογιστεί $\pi(\theta|x)$

Λύση

$$\pi(\theta|x) = \frac{\frac{\theta^{a-1} \cdot (1-\theta)^{b-1}}{B(a, b)} \cdot \binom{n}{x} \cdot \theta^x \cdot (1-\theta)^{n-x}}{\int_0^1 \frac{\theta^{a-1} \cdot (1-\theta)^{b-1}}{B(a, b)} \cdot \binom{n}{x} \cdot \theta^x \cdot (1-\theta)^{n-x} d\theta} =$$

$$= \frac{\theta^{a+x-1} \cdot (1-\theta)^{n+b-x-1}}{\int_0^1 \theta^{a+x-1} \cdot (1-\theta)^{n+b-x-1} d\theta} \quad (1)$$

$$\int_0^1 \theta^{a+x-1} \cdot (1-\theta)^{n+b-x-1} d\theta =$$

$$= \int_0^1 \frac{\theta^{(a+x)-1} \cdot (1-\theta)^{(n+b-x)-1}}{B(a+x, n+b-x)} d\theta =$$

$$= B(a+x, n+b-x) \cdot \int_0^1 \frac{\theta^{(a+x)-1} \cdot (1-\theta)^{(n+b-x)-1}}{B(a+x, n+b-x)} d\theta =$$

$$= B(a+x, n+b-x)$$

Άρα, η (1) γίνεται:

$$[\theta^{a+x-1} \cdot (1-\theta)^{n+b-x-1}] / B(a+x, n+b-x) = \pi(\theta|x)$$

Ταυτότις, $\theta/x \sim \text{Beta}(a+x, n+b-x)$

Πραγματοποιούμε μια ανανέωση της γνώσης μας θ

6' τρόπος

$$\int_0^1 \theta^{a+x-1} \cdot (1-\theta)^{n+b-x-1} = c(x), \quad \theta \in [0,1]$$

Αλλά, $\theta^{a+x-1} \cdot (1-\theta)^{n+b-x-1}$ μου θυμίζει

μία $\text{Beta}(a+x-1, n+b-x-1)$ αγκά λоггυ

$$c(x) = B(a+x, n+b-x) \text{ ώστε } \int_0^1 \frac{\theta^{a+x-1} \cdot (1-\theta)^{n+b-x-1}}{c(x)} = 1, \text{ οπότε}$$

Έτσι,

$$\theta/x \sim \text{Beta}(a+x, n+b-x)$$

Ορισμός

Θεάν η θ ϵ των νεότερων κατανομών ανήκει στην ίδια οικογένεια κατανομών που ανήκει η θ των προτέρων τότε λέμε ότι είναι συζυγής ϵ των προτέρων κατανομών.

Παράδειγμα 2

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n \sim P(\theta)$ και θ ϵ της της θ

με ϵ των προτέρων κατανομών $\text{Gamma}(p, \frac{1}{q})$.

Να υπολογίσουμε την κατανομή της θ/x

ΛΥΣΗ

$$f(x_i/\theta) = \frac{\theta^{x_i} \cdot e^{-\theta}}{x_i!}, \quad x_i = 0, 1, \dots, i=1, 2, \dots, n$$

$$\pi(\theta) = \frac{\theta^{p-1} \cdot e^{-\theta q}}{\left(\frac{1}{q}\right)^p \cdot \Gamma(p)}, \quad \theta > 0$$

$$\pi(\theta/x) = \frac{\left(\theta^{p-1} \cdot e^{-\theta q} / \left(\frac{1}{q} \right)^p \Gamma(p) \right) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{\theta^{x_i} \cdot e^{-\theta}}{x_i!}}{\int_0^{\infty} \frac{\theta^{p-1} \cdot e^{-\theta q}}{\left(\frac{1}{q} \right)^p \Gamma(p)} \prod_{i=1}^n \frac{\theta^{x_i} \cdot e^{-\theta}}{x_i!} d\theta} =$$

$$= \frac{\theta^{p-1} \cdot e^{-\theta q} \cdot \prod_{i=1}^n (\theta x_i \cdot e^{-\theta})}{\int_0^{\infty} \theta^{p-1} \cdot e^{-\theta q} \cdot \prod_{i=1}^n (\theta x_i \cdot e^{-\theta}) d\theta} =$$

$$= \frac{\theta^{p-1} \cdot e^{-\theta q} \cdot \theta^{\sum x_i} \cdot e^{-n\theta}}{\int_0^{\infty} \theta^{p-1} \cdot e^{-\theta q} \cdot \theta^{\sum x_i} \cdot e^{-n\theta} d\theta} = \frac{\theta^{p+\sum x_i-1} \cdot e^{-\theta(n+q)}}{\int_0^{\infty} \theta^{p+\sum x_i-1} \cdot e^{-\theta(n+q)} d\theta}$$

Το κέρτος $\theta^{p+\sum x_i-1} \cdot e^{-\theta(n+q)}$ ορίζεται
 $\text{Gamma}(p + \sum x_i, \frac{1}{n+q})$.

$$\int_0^{\infty} \theta^{p+\sum x_i-1} \cdot e^{-\theta(n+q)} d\theta = c(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\theta^{p+\sum x_i-1} \cdot e^{-\theta(n+q)}}{c(x)} d\theta = 1$$

Τότε $c(x) = \left(\frac{1}{n+q} \right)^{p+\sum x_i} \cdot \Gamma(p + \sum x_i - 1)$

Τότε $\theta | x \sim \text{Gamma}(p + \sum x_i, \frac{1}{n+q})$

Παράδειγμα 3

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ τ.δ. από την $U(0, \theta)$, θ είναι η τιμή της τιμής θ με την οποία προέρχεται η κατανομή των παρατηρήσεων στο $(0, 1)$. Να υπολογιστεί η τιμή της πυκνότητας πιθανότητας $\pi(\theta | x)$

ΛΥΣΗ

$$f(x_i | \theta) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 \leq x_i \leq \theta$$

$$\pi(\theta) = 1, \quad 0 < \theta < 1$$

$$\pi(\theta | x) = \frac{1 \cdot \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta}}{\int_{x(n)}^1 \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} d\theta} = \frac{\frac{1}{\theta^n}}{\int_{x(n)}^1 \frac{1}{\theta^n} d\theta} = \frac{\theta^{-n}}{\int_{x(n)}^1 \theta^{-n} d\theta} \quad (1)$$

Το π.ο. της $\prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta}$ πρέπει να ικανοποιεί

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq \theta \\ 0 \leq x_2 \leq \theta \\ \vdots \\ 0 \leq x_n \leq \theta \\ 0 \leq \theta \leq 1 \end{cases} \iff \max\{0, x_1, \dots, x_n\} \leq \theta \leq 1 \Rightarrow \max\{x_1, \dots, x_n\} \leq \theta \leq 1 \Rightarrow \boxed{X_{(n)} \leq \theta \leq 1}$$

$$\textcircled{1} \rightarrow \pi(\theta|x) = \frac{\theta^{-n}}{\int_{X_{(n)}} \theta^{-n} d\theta} = \dots = \frac{\theta^{-n}}{\frac{1}{n-1} [X_{(n)}^{n-1} - 1]}, \quad X_{(n)} < \theta < 1$$

Παράδειγμα 4

Εστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ ε.δ. από των $N(0,1)$ όπου θ η μέση της τ.κ. θ , με ευ των προτέρων των κανονικά $N(0,1)$. Να υπολογιστεί των $\pi(\theta|x)$ ευ των νέων κατανομή.

Λύση

$$f(x_i|\theta) = (2\pi)^{-1/2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta)^2}, \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$\pi(\theta) = (2\pi)^{-1/2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\theta^2}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \pi(\theta|x) &= \frac{(2\pi)^{-1/2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\theta^2} \cdot \prod_{i=1}^n ((2\pi)^{-1/2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta)^2})}{\int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi)^{-1/2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\theta^2} \cdot \prod_{i=1}^n ((2\pi)^{-1/2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta)^2}) d\theta} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\theta^2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \sum (x_i-\theta)^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \sum (x_i-\theta)^2} d\theta} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\theta^2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \sum \{x_i^2 - 2\theta x_i + \theta^2\}}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \sum \{x_i^2 - 2\theta x_i + \theta^2\}} d\theta} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\theta^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\sum x_i^2 - 2\theta \sum x_i + n\theta^2)}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\sum x_i^2 - 2\theta \sum x_i + n\theta^2)} d\theta} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\theta^2(n+1)} \cdot e^{\theta \sum x_i}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\theta^2(n+1)} \cdot e^{\theta \sum x_i} d\theta} \\ &= \frac{e^{-\frac{n+1}{2}(\theta^2 - 2\theta \frac{\sum x_i}{n+1})}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n+1}{2}(\theta^2 - 2\theta \frac{\sum x_i}{n+1})} d\theta} = e^{-\frac{n+1}{2}(\theta^2 - 2\theta \frac{\sum x_i}{n+1})} \rightarrow \theta|x \sim N\left(\frac{\sum x_i}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5

Έστω $X \sim \text{με σνη ή ση εν}$

$$f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad 0 < \theta < x$$

όπου θ είναι η είδη εν εν θ , με

$$\text{Εντων προτέρων } \pi(\theta) = 2e^{-2\theta}, \quad \theta > 0$$

να βρεθεί η εν των εντέρων.

Λύση

$$\pi(\theta|x) = \frac{2e^{-2\theta} \cdot e^{-(x-\theta)}}{\int_0^x 2e^{-2\theta} \cdot e^{-(x-\theta)} d\theta} = \frac{e^{-\theta}}{\int_0^x e^{-\theta} d\theta} = \frac{e^{-\theta}}{1-e^{-x}}, \quad 0 < \theta < x$$

Πολλές φορές οι ερευνητές δεν έχουν προαίρετες πληροφορίες για το θ , για το λόγο αυτό πρέπει να χρησιμοποιήσουν τις διαθέσιμες μη πληροφοριακές εν των προτέρων κατανομές, δηλαδή εν των προτέρων κατανομές που δεν δίνουν πληροφορίες για τον παράμετρο θ . Μια τέτοια είναι αυτή που έχει προταθεί στη βιβλιογραφία από τον Jeffrey που δίνεται από τη σχέση

$$\pi(\theta) \propto \left(-E_{x|\theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x|\theta) \right) \right)^{1/2}$$

$\uparrow$
αναλογία

Παράδειγμα 6

Έστω $x|\theta \sim B(n, \theta)$ να βρεθεί των Jeffrey

$$f(x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}, \quad x=0,1,2,\dots,n$$

Λύση

$$\log f(x|\theta) = \binom{n}{x} + x \log \theta + (n-x) \log (1-\theta)$$

$$\frac{\partial \log f(x|\theta)}{\partial \theta} = \frac{x}{\theta} - \frac{(n-x)}{1-\theta}$$

$$\frac{\partial^2 \log f(x|\theta)}{\partial \theta^2} = - \left(\frac{x}{\theta^2} + \frac{n-x}{(1-\theta)^2} \right)$$

$$E \left(\frac{x}{\theta^2} + \frac{n-x}{(1-\theta)^2} \right) = \frac{E x}{\theta^2} + \frac{n - E x}{(1-\theta)^2} =$$

$$= \frac{n\theta}{\theta^2} + \frac{n-n\theta}{(1-\theta)^2} = \frac{n}{\theta(1-\theta)}$$

Τότε έχουμε, $\pi(\theta) \propto \left(\frac{n}{\theta(1-\theta)} \right)^{1/2} = n^{1/2} \theta^{-1/2} (1-\theta)^{-1/2}$

Εντούτοις, $\pi(\theta) \propto \theta^{-1/2} (1-\theta)^{-1/2}, \quad 0 \leq \theta \leq 1$

Ποση αναλογία,

$$\pi(\theta) = \frac{\theta^{-1/2} (1-\theta)^{-1/2}}{B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}, \quad 0 < \theta < 1$$

Σελ. 62. (Βιβλίο)

